FISIMUR

Con la colaboración de Johannes

Objetivos

Estos problemas nacen de la necesidad de poner en juego una serie de herramientas matemáticas aplicadas a problemas de Física. Todos sabemos que una parte de esta materia requiere el uso hábil de cierto tipo de utensilios y pasadizos matemáticos, cuya práctica da lugar a una mejor adaptación del alumno a aquello que debe utilizar. En unas ocasiones serán ecuaciones diferenciales, en otras análisis de gráficas, polinomios de Taylor, etc... Para superar el miedo a estas herramientas, y que el alumno pueda centrarse en el problema físico, desarrollamos aquí una serie de problemas, para pensar y reflexionar, pero al mismo tiempo, para calcular y comprender. Al principio de cada problema se exponen los conocimientos mínimos indispensables. Podéis enviar vuestras soluciones al Jedi Johannes, arriba a la derecha.

4 – 11 – 2006

2. Relatividad Especial

Conocimientos mínimos indispensables: Mecánica Relativista, Análisis Matemático (Taylor, integración), Leyes de Newton (puede que algún que otro detalle más).

Siguiendo con el tiro parabólico, uno puede preguntarse cuál debe ser la expresión del vector posición en función del tiempo, en el caso de la relatividad. Consideremos para ello, cuál es el movimiento uniformemente desacelerado de un cuerpo que se mueve en dos dimensiones, y que es propulsado inicialmente con una velocidad inicial v_0, y un ángulo, respecto de la horizontal del plano de lanzamiento de α. La aceleración de nuestro sistema se ejerce hacia el plano horizontal de lanzamiento y es ω_0. Utilícense condiciones iniciales adecuadas.

- ¿Qué sucede si $v_0 = 0$?
- Calcular el desarrollo de Mac Laurin hasta orden segundo orden, al menos, para las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ y tomar el límite $c \to \infty$, comprobando que se obtienen de nuevo la expresiones clásicas.

Este problema es más bien un experimento, pues incluso el resultado, aún pudiéndose reducir a las expresiones clásicas, es algo extraño.

Solución.-

Si consideramos una aceleración constante ω_0, con las condiciones iniciales $x = 0$ en $t = 0$, obtenemos que el movimiento uniformemente acelerado viene dado por,

$$x = \frac{c^2}{\omega_0}\left(\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 t^2}{c^2}} - 1\right) \tag{1}$$

resultado que ya conocemos (viene en muchos libros de texto), y cuya desarrollo, para velocidades $v \ll c$, es,

$$x = 1 + \frac{\omega_0 t^2}{2} \tag{2}$$

que es justo la expresión clásica del movimiento uniformemente acelerado.

Consideremos las siguientes abreviaturas (casi típicas),

- $\beta = \frac{v_0}{c}$
- $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$

Ahora consideraremos que en $t = 0$, $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \operatorname{sen}\alpha, 0)$. Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, haríamos,

$$\frac{d}{dt}(v_x\gamma) = 0 \;; \quad \frac{d}{dt}(v_y\gamma) = \omega_0 \tag{3}$$

Resolviendo y aplicando las condiciones iniciales, obtenemos, para v_x

$$v_x = \gamma v_0 \cos\alpha \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{4}$$

Como que, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, podemos despejar v_x y obtenemos,

$$v_x = \frac{v_0\cos\alpha\gamma\sqrt{1-\frac{v_y^2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{v_0^2\cos^2\alpha\gamma^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Analicemos ahora v_y, integrando y aplicando condiciones iniciales,

$$v_y = (\omega_0 t + v_0 \operatorname{sen}\alpha)\sqrt{1-\frac{v_x^2+v_y^2}{c^2}} \tag{6}$$

Para simplificar nuestras expresiones un poco, hacemos

- $k = \omega_0 t + v_0 \operatorname{sen}\alpha$

Sustituyendo v_x por el valor que hemos obtenido antes, y despejando v_y obtenemos,

$$v_y = k\left(1+\frac{\gamma^2 v_0^2\cos^2\alpha}{c^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{7}$$

Con lo que ya tenemos una de las componentes de la velocidad. Para determinar la otra, volvemos a la expresión de v_x, y con ayuda de (6), obtenemos,

$$v_x = \frac{v_0 \cos \alpha \gamma}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \gamma^2}{c^2}}} \left[1 + \frac{k^2}{c^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \gamma^2}{c^2}} \right) \right]^{-1/2} \tag{8}$$

En ambas expresiones, la dependencia con el tiempo se halla sólo en k.

Hallemos ahora las ecuaciones para las componentes x e y del vector posición. Integrando las expresiones respectivas y aplicando las condiciones iniciales, ($x = y = 0$, $t = 0$), tenemos que,

$$y = \frac{c^2}{\omega_0} \left\{ \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{c^2} + \frac{1}{c^2} \left(\omega_0 t + v_0 \operatorname{sen} \alpha \right)^2} - \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{c^2} + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{c^2}} \right\} \tag{9}$$

$$x = \frac{c v_0 \cos \alpha \gamma}{\omega_0} \left\{ \operatorname{Arcsenh} \left(\frac{\omega_0 t + v_0 \operatorname{sen} \alpha}{c \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{c^2}}} \right) - \operatorname{Arcsenh} \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{c \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{c^2}}} \right) \right\} \tag{10}$$

Obtengamos las primeras obviedades. Si $v_0 = 0$, entonces,

$$v_x = 0 \ ; \quad v_y = \frac{\omega_0 t}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 t^2}{c^2}}} \tag{11}$$

$$x = 0 \ ; \quad y = \frac{c^2}{\omega_0} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \tag{12}$$

que corresponde a un movimiento uniformemente acelerado en la dirección y.

Ahora debemos desarrollar nuestras expresiones para x y para y, cuando $c \to \infty$. Haciendo el desarrollo obtenemos,

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha t; \\ y &= v_0 \operatorname{sen} \alpha t + \frac{1}{2} \omega_0 t^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Donde sólo ha sido necesario recordar que,

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) \tag{14}$$

Obsérvese, que aunque estamos tratando un movimiento semejante a un tiro parabólico, la relatividad especial no sería suficiente, aunque el desarrollo en serie de las expresiones obtenidas sea el correcto. Para obtener las ecuaciones exactas del tiro parabólico necesitaríamos resolver las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General, imponiendo las condiciones adecuadas correspondientes al tipo de órbita que tenemos.