FISIMUR

Con la colaboración de Johannes

Objetivos

Estos problemas nacen de la necesidad de poner en juego una serie de herramientas matemáticas aplicadas a problemas de Física. Todos sabemos que una parte de esta materia requiere el uso hábil de cierto tipo de utensilios y pasadizos matemáticos, cuya práctica da lugar a una mejor adaptación del alumno a aquello que debe utilizar. En unas ocasiones serán ecuaciones diferenciales, en otras análisis de gráficas, polinomios de Taylor, etc... Para superar el miedo a estas herramientas, y que el alumno pueda centrarse en el problema físico, desarrollamos aquí una serie de problemas, para pensar y reflexionar, pero al mismo tiempo, para calcular y comprender. Al principio de cada problema se exponen los conocimientos mínimos indispensables. Podéis enviar vuestras soluciones al Jedi Johannes, arriba a la derecha.

29 – 9 – 2006

1. Sistemas no inerciales

Conocimientos mínimos indispensables: Geometría, Análisis Matemático (Taylor, integración), Leyes de Newton (puede que algún que otro detalle más).

Tratando de observar más cuidadosamente la cinemática, llegué al tema que hace referencia al movimiento relativo en sistemas no inerciales. En seguida, comencé a leer términos como fuerza centrífuga, fuerza de Coriolis...muchos.

En fin, supuse que si me ponía a analizar lo que las ecuaciones de Newton predicen para un sistema no inercial, tal vez podría tener una idea más aproximada de qué cosas suceden en los tiros parabólicos reales.

El caso más simple de tiro parabólico, en un sistema de referencia inercial, parecía bastante claro. Así que me dije, que tal vez podría ponerme a analizar el mismo tiro parabólico, sin interacción por parte de las fuerzas de rozamiento, pero suponiendo que la tierra, como ocurre en realidad, gira alrededor de su eje.

Utilizando las aproximaciones adecuadas (despreciando términos del orden de ω^2, con ω, la velocidad de rotación de la tierra alrededor de su eje), me propuse el siguiente problema:

- Un proyectil se lanza desde un punto de la superficie de la Tierra (hemisferio Norte) de colatitud λ, con velocidad v_0 hacia el Oeste, formando un ángulo α con la horizontal del plano de lanzamiento. ¿Cuál es el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima?¿Y la altura máxima? Compare el problema con el resultado en un sistema de referencia inercial.

Lo interesante de este problema es, entre otras muchas cosas, su resolución por integraciones sucesivas.

¿Serías capaz de resolverlo explícitamente con dicho método?

Solución.-

La solución de este problema es bastante sencilla. Si bien, es necesario comprender qué está sucediendo. En este caso, el lanzamiento del proyectil se realiza en tres dimensiones, pues debemos considerar la desviación respecto a la vertical.

Consideraremos el sistema fijo, $\mathcal{O}'$, solidario con el eje que atraviesa la tierra por sus polos. Nuestro sistema de referencia en movimiento, $\mathcal{O}$, se encontrará a una colatitud λ (ángulo complementario a la latitud), con los ejes dispuestos de la siguiente forma: el eje z apuntará en la dirección vertical, el eje y apuntará en la dirección horizontal (en el sentido de plano de lanzamiento) Oeste-Este, mientras que el eje x apuntará en la dirección horizontal Norte-Sur.

Establezcamos nuestras variables y constantes:

- $\vec{\omega}' = \omega\widehat{k}'$, velocidad angular de la Tierra. Consideraremos que no existe aceleración angular, θ. En nuestro sistema de referencia:

$$\vec{\omega} = (-\omega \operatorname{sen} \lambda, 0, \omega \cos \lambda)$$

- $\vec{r} = (x, y, z)$ posición del cuerpo.
- $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ velocidad del cuerpo.
- $\vec{v}_0 = (0, -v_0 \cos \alpha, v_0 \operatorname{sen} \alpha) = (v_1, v_2, v_3)$ velocidad inicial.
- $\vec{g} = -g\widehat{k}$

Desde nuestro sistema de referencia, la aceleración que medimos sobre el cuerpo viene dada por:

$$\vec{a} = \vec{g}' - (\theta \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) - 2\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{1}$$

Donde asumimos que $\theta = 0$, y englobamos el término *centrífugo* en $\vec{g}'$, llamando $\vec{g} = \vec{g}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, y siendo esta $\vec{g}$, la medida de la aceleración de la gravedad. En definitiva, sólo el término de Coriolis afectará a nuestros cálculos:

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\,(\vec{\omega} \times \vec{v}) \tag{2}$$

Expresándolo como un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \cos \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \cos \lambda + \dot{z} \operatorname{sen} \lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \operatorname{sen} \lambda \dot{y} \end{cases}$$

Como vemos las variables están entrelazadas. De entre las muchas formas que tenemos para resolver este problema, se nos pide que lo realicemos por integraciones sucesivas. Este método consiste en realizar una primera integración del problema. La primera integración, será un integración doble sobre el tiempo, de tal forma que nuestro sistema dependa de las integrales primeras de las variables buscadas. Tras ella, proponemos unos valores para las variables que buscamos x, y, z. Con estos valores, obtenemos la primera aproximación (siempre a orden $\mathcal{O}(\omega^2)$). Con el resultado de esta primera aproximación volveremos de nuevo a las integrales primeras de nuestras variables, y las realizaremos. El proceso es cíclico hasta que obtenemos en dos integraciones el mismo resultado. Hay que señalar que el proceso depende de hasta qué orden queremos nuestros términos.

Veámoslo. En primer lugar integramos dos veces, en cada variable, nuestro sistema:

$$\begin{cases} x = 2\omega\cos\lambda\displaystyle\int_0^t ydt + v_1 t \\ \\ y = -2\omega\cos\lambda\displaystyle\int_0^t xdt - 2\omega\operatorname{sen}\lambda\displaystyle\int_0^t zdt + v_2 t \\ \\ z = -\dfrac{g}{2}t^2 + 2\omega\operatorname{sen}\lambda\displaystyle\int_0^t ydt + v_3 t \end{cases} \tag{3}$$

Nuestra primer intento será tomar $x = y = z = 0$. Con ello:

$$\begin{cases} x = v_1 t \\ \\ y = v_2 t \\ \\ z = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_3 t \end{cases}$$

Con estos valores, volvemos a (3), e integramos:

$$\begin{cases} x = \omega\cos\lambda v_2 t^2 + v_1 t \\ \\ y = -\omega\operatorname{sen}\lambda v_3 t^2 + \omega\operatorname{sen}\lambda g\dfrac{t^3}{3} + v_2 t - \omega\cos\lambda v_1 t^2 \\ \\ z = v_3 t - \dfrac{g}{2}t^2 + \omega\operatorname{sen}\lambda v_2 t^2 \end{cases}$$

Y, de nuevo, volvemos a introducir estos valores en (3), para obtener:

$$\begin{cases} x = v_1 t + \omega\cos\lambda v_2 t^2 \\ \\ y = v_2 t - \omega\left(\operatorname{sen}\lambda v_3 + \cos\lambda v_1\right)t^2 + g\dfrac{t^3}{3}\omega\operatorname{sen}\lambda \\ \\ z = v_3 t - \dfrac{g}{2}t^2 + \omega\operatorname{sen}\lambda v_2 t^2 \end{cases}$$

Y si volvemos a introducir estos valores en (3), obtendremos lo mismo, con lo que el proceso ha acabado. Imponemos ahora condiciones iniciales, y obtendremos que:

$$\begin{cases} x = -\omega\cos\lambda v_0\cos\alpha t^2 \\ \\ y = v_0\cos\alpha t - v_0\omega\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda t^2 + g\dfrac{t^3}{3}\omega\operatorname{sen}\lambda \\ \\ z = v_0\operatorname{sen}\alpha t - \dfrac{g}{2}t^2 - v_0\omega\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda t^2 \end{cases}$$

Dado que queremos averiguar el tiempo en alcanzar la altura máxima, imponemos que $\dot{z} = 0$,

$$0 = v_0\operatorname{sen}\alpha - gt - 2v_0\omega\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda t \Rightarrow t = \frac{v_0\operatorname{sen}\alpha}{g}\frac{1}{1+\frac{2v_0\omega\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda}{g}}$$

Haciendo un desarrollo de Taylor hasta orden $\mathcal{O}(\omega^2)$,

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} - \frac{2v_0^2 \omega \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \lambda}{g^2} + \mathcal{O}(\omega^2) \tag{4}$$

Y observamos que si $\omega = 0$ (la Tierra no giraría), obtenemos el resultado para el tiro parabólico en dos dimensiones.

Por otro lado, si queremos calcular la altura máxima, sólo tenemos que introducir el tiempo que hemos hallado en (4), pero sólo en la componente que necesitamos, obteniendo:

$$z = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} - \frac{v_0^3 \omega \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \lambda}{g^2} + \mathcal{O}(\omega^2) \tag{5}$$

Obviamente, si $\omega = 0$, volvemos al caso del tiro parabólico en dos dimensiones.