MECÁNICA CUÁNTICA AVANZADA. JUNIO 2004

Parte A

1. Dados una terna de vectores $(k, \epsilon_1, \epsilon_2)$ donde ϵ_λ son vectores de polarización convencionales. Demostrar que para todo s,s' se tiene

$$\sum_{\lambda=1,2} (\epsilon_\lambda)_s (\epsilon_\lambda)_{s'} = \delta_{ss'} - k_s k'_s / k^2$$

2. Calcular el valor esperado $< 0|\hat{\vec{A}}(r,t)|0 >$

3. Calcula los valores esperados (propagador),

$$< 0|T\hat{A}_i(r,t)\hat{A}_j(r',t')|0 >$$

para $t = t'$y $t > t'$

4. Sea un átomo de hidrógeno (sistema B) en presencia de un campo magnético cuántico (sistema A). Un modelo simple para la emisión dipolar atómica viene dado por la consideración de un término de acoplamiento como el que sigue para el electrón del átomo de hidrógeno con el campo:

$$\hat{\vec{j}}(\vec{r_B}, t) = e\alpha\hat{\vec{r}}_B \delta(E_i - E_f)$$

donde $(E_i)_A = h\nu = \hbar|k|c, E_i, E_f$ sonlas energías iniciales y finales totales. Se pide, en primer orden de teoría de perturbaciones, el cálculo de la amplitud de probabilidad de transición entre los estados iniciales y finales siguientes:

- $|i_A, i_A >= |0_A > |nlm >$, $|f_A, f_B >= |\vec{k}\epsilon^{\pm}_k >_A |n'l'm' >_B$
- $|i_A, i_A >= |0_A > |nlm >$, $|f_A, f_B >= |\vec{k}\epsilon_{k,(1,2)} >_A |n'l'm' >_B$

Discutir si son posibles y cuales estn prohibidos

5. Sea el campo electromagnético cuántico (sistema A) acoplado a un oscilador armónico cuántico *fermiónico* (sistema B) con operadores de creación y destrución $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ (ver relaciones de conmutación). El acoplamiento lo podemos tomar como un término

$$\hat{\vec{j}}(\vec{r}_B, t) = e\vec{M}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)\delta(\vec{r}) \qquad , \qquad (0 < t < T)$$

Donde $\vec{M}$ es un vector constante. Calcular la amplitud de probabilidad de transición para el caso

$$|i_A, i_B >= |0 >_A |n >_B \quad , \quad |f_A, f_B >= |\vec{k}\epsilon_g >_A |m >_B$$

donde n y m son todas las combinaciones posibles de cualquiera de los estados $(0, 1, 2)$ para el oscilador ferminico, y $\epsilon_g = \vec{k} \times \vec{M}/|\vec{k} \times \vec{M}|$

Parte B

1. Sea un sistema cuántico de una dimensión regido por un lagrangiano $L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2(q - \lambda(t)^2))$ donde $\lambda(t)$ es una función arbitraria fijada. Se pide (tomar $m = 1$)

    - Obtener, en primer orden de teoría de perturbaciones en los parámetros $\omega^2, \lambda(t)$ el propagador de la partícula $< q_f, t_f || q_i, t_i >$
    - Escribir el resultado exacto y comparar con el resultado anterior. Es buena la oproximación?
    - Obtener de manera exacta y aproximada la "función de correlación a dos puntos "$< q_f, t_f | T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) | q_i, t_i >$
    - Se supone que el sistema está en un estado inicial dado por la función de onda en el espacio de posición en t_i , $\psi_i(q)$. Se pide obtener, a partir de las fórmulas exactas y aproximadas, el estado del sistema en el espacio de posiciones en un tiempo t. $\psi_0(q) = A\delta(q - q_0)$

2. Sea una partícula que puede moverse libremente en el plano. El potencial es 0 excepto en un segmento de longitud $2a$, agujereado en el centro (ver esquema), donde el potencial es infinito. Se pide:

    - calcular explícitamente la acción clásica para una partícula libre, que va de los puntos A a C, en un tiempo T con la condición de que pase forzosamente por el punto intermedio B. La distancia entre los puntos A,B es d_1, la distancia entre los puntos B,C es d_2. Hacer uso explícito del principio de mínima acción.
    - Estimar la amplitud de propagación o propagador de un transición desde el origen a: a)el punto X b)un punto genérico de la línea L, considerando en particular el caso donde el punto genérico está situado a una distarncia $d < a$ del eje X. La estimación se debe basar en argumentos físicos, el concepto de integral de camino, la importancia de las trayectorias clásicas en el cálculo de amplitudes de transición cuánticas, la forma de la trayectoria clásica entre dos puntos de una partícula libre. No es necesario el cálculo detallado, pero sí alguna fórmula concreta que explicite los argumentos básicos.

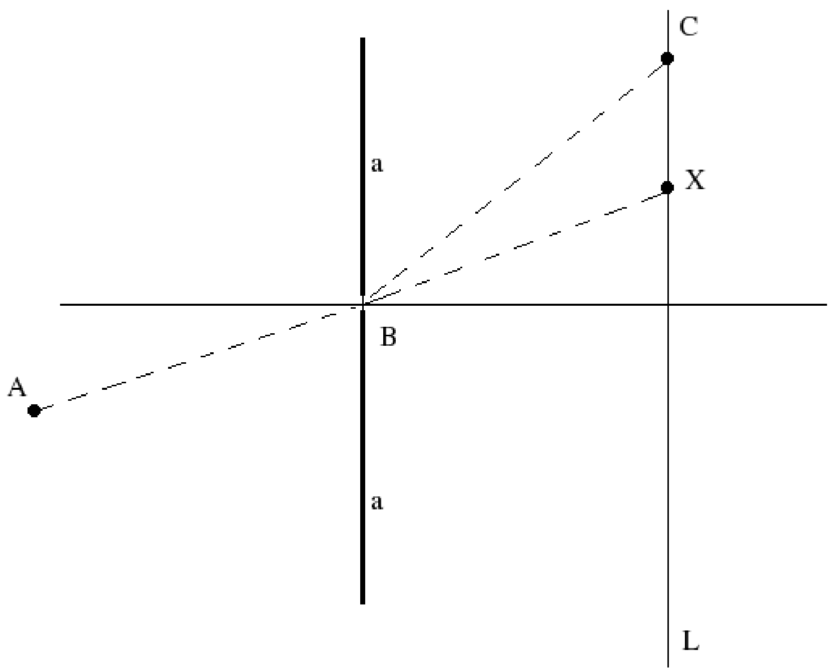

Figure 1: Figura que explica el enunciado del problema 2 de la parte B.

Datos adicionales

- Hamiltoniano fermiónico $H = (bb^\dagger + 1/2)h\omega_0$
- $\{b, b\} = 2b^2 = 0, \{b, b^\dagger\} = 1$
- Espacio de Fock, propiedades:$b|0>= 0, b^\dagger|0>= |1>, < 0||0>?1, < 1||1>= 1$